

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , è assegnata la curva k di equazione $y=f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

- a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.
- b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
- c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
- d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x .
- e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Si discute la positività della funzione: si ha $\frac{x^2+2}{x^3+2} > 0$ per $x > -\sqrt[3]{2}$, $\frac{x^2+2}{x^3+2} < 0$ per $x < -\sqrt[3]{2}$. Pertanto il grafico è situato nel semipiano $y > 0$ per $x > -\sqrt[3]{2}$ e nel semipiano $y < 0$ per $x < -\sqrt[3]{2}$.

b) Il punto della curva k di ascissa -1 ha ordinata $f(-1) = 3$ e quindi coordinate $(-1; 3)$.

La parabola richiesta ha equazione $y = ax^2 + bx$. Il passaggio per $(-1; 3)$ implica che $a - b = 3$ e quindi l'equazione diventa $y = ax^2 + (a - 3)x$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola è dato da $y' = 2ax + a - 3$ e nel punto di ascissa -1 vale $m = -a - 3$.

Il coefficiente angolare m' della retta tangente alla curva k nel punto $x = -1$ è uguale a $f'(-1)$. Poiché $f'(x) = \frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$, $m' = f'(-1) = -11$. Imponendo la condizione di perpendicolarità tra le due tangenti, $m \cdot m' = -1$, si trova $-11(-a - 3) = -1 \rightarrow a = -\frac{34}{11}$.

L'equazione della parabola cercata è: $y = -\frac{34}{11}x^2 - \frac{67}{11}x$.

c) Per le considerazioni al punto b, la retta passante per $(-1; 3)$ e tangente alla curva k ha equazione:

$y - 3 = -11(x + 1) \rightarrow y = -11x - 8$. Le intersezioni tra tale retta e la curva si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -11x - 8 \\ y = \frac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases} \quad \text{L'equazione risolvente è}$$

$11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$. Poiché $x = -1$ è un punto di tangenza, il polinomio sarà divisibile due volte per il binomio $(x + 1)$. Applicando la regola di Ruffini, esso si scompone nel modo seguente: $(x + 1)^2(11x^2 - 14x + 18)$.

Il discriminante di $11x^2 - 14x + 18$ vale: $\frac{\Delta}{4} = 49 - 198 < 0$; pertanto non esistono soluzioni reali del polinomio diverse da $x = -1$.

Se ne conclude che la retta tangente interseca la curva k solo nel punto $(-1; 3)$.

d) Si tratta di determinare i punti stazionari della funzione f , dove, cioè, la derivata prima si annulla. Nel punto b) si era calcolato $f'(x) = \frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$. Pertanto si hanno punti stazionari per $x = 0$ e nelle

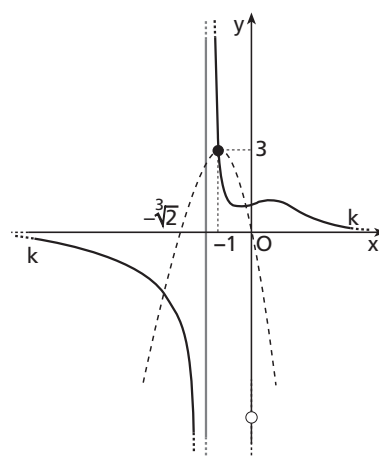
eventuali soluzioni dell'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$. Poiché quest'ultima non è risolvibile per via elementare, si consideri la funzione $g(x) = x^3 + 6x - 4$. Essa è continua e assume in \mathbb{R} sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno uno zero e, essendo la derivata prima $g'(x) = x^2 + 6$ di segno costante, per non andare contro il teorema di Rolle, esisterà un solo zero.

In conclusione, i punti in cui la curva k ha tangente parallela all'asse x sono due, $x = 0$ e l'unica radice dell'equazione $x^3 + 6x - 4 = 0$.

e) Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a; b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Essendo la funzione $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}$ non definita nel punto $x = -\sqrt[3]{2}$ e $-\sqrt[3]{2} < -\sqrt[3]{2} < 0$, essa non è quindi continua nell'intervallo $[-\sqrt[3]{2}; 0]$. Di conseguenza il teorema di Lagrange non è applicabile.



▲ Figura 1.